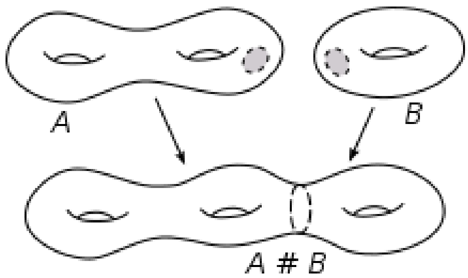
EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Série 5**

Exercice 1.

1. Montrer que $\Sigma A/(A \times \{1/2\})$ est homotope au wedge $\Sigma A \vee \Sigma A$.
2. Rappeler la définition de l'opération de concaténation et de l'opération produit via le pinch pour $n = 1$.
$$*, \cdot : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$
et montrer que ces deux opérations coincident.

Exercice 2.
Démontrer l'associativité de l'opération produit $\cdot$ pour $n = 1$.
Indication : on dit qu'un diagramme
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xrightarrow{h} & D \end{array}$$
commute à homotopie près si $f \circ g \simeq h \circ i$. On pourra utiliser le diagramme vu en cours et montrer qu'il commute à homotopie près.

Exercice 3. Le tore à deux trous
En topologie, une surface est un espace topologique séparé dont chaque point admet un voisinage homéomorphe au disque ouvert $D^2 \setminus \partial D^2$. Etant donné deux surfaces on définit leur somme connexe à homéomorphisme près, comme la surface obtenue en retirant un ouvert homéomorphe à un disque à chacune des surfaces, et en identifiant les bords. On note $S_1 \sharp S_2$.



On appelle tore à g trous (ou tore de genre g), la somme connexe $T\sharp \ldots \sharp T$ de g tores $T = S^1 \times S^1$.

1. Donner une description du tore à deux trous comme quotient d'un octogone, à la manière dont le tore est obtenu comme quotient du carré.
2. Identifier une structure cellulaire de ce tore à deux trous. On demande en particulier de calculer le nombre de 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules, puis de décrire les applications d'attachement.
3. (optionnel) Généraliser au tore à 3 puis à g trous.

Exercice 4.

1. Montrer que le produit des groupes d'homotopie est commutatif pour $n = 2$. On pourra utiliser une représentation graphique du domaine de $f \cdot g$ en voyant S^2 comme quotient d'un carré par son bord, pour décrire une homotopie entre $f \cdot g$ et $g \cdot f$.

2. Montrer que le produit des groupes d'homotopie est commutatif pour $n \geq 2$.

Exercice 5*. Le groupe fondamental de la sphère. Montrons que $\pi_1 S^2 = 1$.

1. Montrer que tout lacet dans $(\mathbb{R}^2, (a; b))$ est homotope au lacet constant au point de base $(a; b)$.
2. Montrer que deux chemins qui ont les mêmes extrémités dans $\mathbb{R}^2$ sont homotopes via une homotopie qui fixe les points de départ et d'arrivée.
3. Si $f\colon S^1 \to S^2$ est un lacet non surjectif, montrer que f est homotope au lacet constant.
4. Si f est un lacet surjectif (c'est possible : voir "courbe remplissante" sur Wikipedia), choisir un recouvrement de S^2 par deux ouverts et montrer que f est homotope à une concaténation finie de chemins se trouvant soit dans l'un des ouverts soit dans l'autre. Conclure qu'aussi ici f est homotope au lacet constant.